INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Considerăm mulţimile $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+(a-1)\cdot x-a=0\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid a\cdot x^2-(2a+1)\cdot x+a+1=0\}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

a) Arătaţi că 1 aparţine mulţimilor A şi B.

b) Determinaţi mulţimile A şi B.

c) Să se determine valoarea lui ***a*** ştiind că $A\cup B\subset\mathbb{Z}$.

Soluţie.

a) Verificare $1\in A$ 1p

$1\in B$ 1p

b) Se obține $A=\{1,-a\}$ 1p

$B=\left\{1,\frac{a+1}{a}\right\}$ 1p

c) Din $A\cup B\subset\mathbb{Z}$, rezultă că $a\in\mathbb{Z}$ şi $\frac{a+1}{a}\in\mathbb{Z}$ 1p

Finalizare $a\in\{-1,1\}$ 2p

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{x^2}{2}+2x$, precum şi numerele $u=a^2-2a+3$ şi $v=1+2a-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Reprezentaţi graficul funcţiei f.

b) Demonstraţi că $v\le 2\le u, (\forall) a\in\mathbb{R}$.

c) Demonstraţi că $\frac{f(u)+f(v)}{2}\le f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a\in\mathbb{R}$.

Soluţie.

a) Reprezentarea corectă a graficului 1p

b) Se verifică $v\le 2\Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$, adevărat 1p

$u\ge 2\Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$, adevărat 1p

c) Deoarece $-\frac{1}{2}<0\Rightarrow f(x)\le 2,\ (\forall) x\in\mathbb{R}$ 1p

Deducem că $f(u)\le 2, f(v)\le 2$ 1p

Rezultă că $\dfrac{f(u)+f(v)}{2}\leq 2$ 1p

Dar $\dfrac{u+v}{2}=2$, deci $\dfrac{f(u)+f(v)}{2}\leq f\left(\dfrac{u+v}{2}\right),(\forall)a\in\mathbb{R}$ 1p

3. Un triunghi are un unghi obtuz iar lungimile laturilor sunt numere naturale în progresie aritmetică cu raţia 2. Determinaţi perimetrul triunghiului.

Soluţie.

Fie $\triangle ABC$ $AB=a$, $AC=a+2$ şi $BC=a+4$ 1p

Deducem că $m(\measuredangle A)>90^\circ$ 1p

Folosind teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\measuredangle A)$ 1p

Obținem $\cos(\measuredangle A)=\dfrac{a^2-4a-12}{2a(a+2)}$ 1p

Din $m(\measuredangle A)>90^\circ\Rightarrow\cos(\measuredangle A)<0\Rightarrow a^2-4a-12<0$ 1p

Se obține $a\in(-2,6)\cap N^*=\{1,2,3,4,5\}$ 1p

Convin numai $a\in\{3,4,5\}$, deci perimetrul poate fi 15, 18 sau 21 .... 1p

4. Pentru a termina o lucrare, 5 muncitori au nevoie de 20 de zile. Ei lucrează la lucrare un număr de $\boldsymbol{n}$ zile, $5\leq n\leq 11$, după care un muncitor pleacă la o altă lucrare. În câte zile vor termina lucrarea cei 4 muncitori rămaşi?

Soluţie.

Un muncitor execută într-o zi $\dfrac{1}{100}$ din lucrare 1p

În $\boldsymbol{n}$ zile, toți muncitorii vor executa $\dfrac{n}{20}$ din lucrare 1p

Rămâne de executat $\dfrac{20-n}{20}$ din lucrare 1p

Fie x - numărul de zile necesare terminării lucrării de către cei 4 muncitori.

Ei vor executa $\dfrac{4x}{100}$ din lucrare 1p

Deci $\dfrac{4x}{100}=\dfrac{20-n}{20}\Rightarrow x=\dfrac{100-5n}{4}=25-\dfrac{5n}{4}$ 1p

Deducem că $\dfrac{5n}{4}\in\mathbb{N}\Rightarrow n\,\vdots\,4$, de unde numai n=8 convine 1p

Finalizare x = 15 zile 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră mulţimea $M=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$

a) Demonstraţi că $z_1=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $z_2=\cos t-i\cdot\sin t$ aparţin mulţimii M, oricare ar fi $t\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că pentru orice $z_1,z_2\in M$ şi produsul $z_1\cdot z_2\in M$.

c) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei "***Dacă*** $z_1\cdot z_2\in M$ ***şi*** $z_1\in M$***, atunci*** $z_2\in M$"

Soluţie.

a) Deoarece $|z_1|=1$ şi $|z_2|=1$, rezultă că $z_1,z_2\in M$ 2p

b) Dacă $z_1,z_2\in M$, atunci $|z_1|\le 1$ şi $|z_2|\le 1$.

Folosind proprietăţile modulului $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\le 1$, deci $z_1\cdot z_2\in M$ 3p

c) Propoziţia este falsă. Un contraexemplu îl poate constitui numerele complexe z_1,z_2 cu $|z_1|=\frac{1}{9}$ şi $|z_2|=3$. În acest caz $|z_1\cdot z_2|=\frac{1}{3}\le 1$, deci $z_1\cdot z_2\in M$ **şi** $z_1\in M$**,** dar $z_2\notin M$ 2p

2. Se consideră dreptele $(d_m): y=m\cdot x+\sqrt{3}-m,\ m\in\mathbb{R}$

a) Pentru $m=1$, determinaţi coordonatele simetricului punctului $O(0,0)$ faţă de dreapta (d_1).

b) Demonstraţi că dreptele (d_m) trec printr-un punct fix.

c) Dacă $m,n\in\mathbb{R},\ m\neq n,\ OP\perp d_m,\ OQ\perp d_n$, să se demonstreze că $PQ\le 4$.

Soluţie.

a) $(d_1): y=x+\sqrt{3}-1$.Fie $A(a,b)$ simetricul originii. Atunci $OA\perp d_1 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=-1$ 1p

Mijlocul segmentului $[OA]\in(d_1)\Leftrightarrow \frac{b}{2}=\frac{a}{2}+\sqrt{3}-1$ 1p

Se obține $a=1-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}-1$**,** deci punctul căutat este $A(1-\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$ 1p

b) $(d_m): m(x-1)-y+\sqrt{3}=0, (\forall)m\in\mathbb{R}$ rezultă că $x-1=0$ şi $-y+\sqrt{3}=0$, deci $F(1,\sqrt{3})$ este punctul fix căutat 2p

c) Dacă F este punctul fix, atunci $F\in d_m, F\in d_n, m\neq n$

Atunci $OP\le OF=2, OQ\le OF=2$ 1p

Folosind inegalitatea triunghiulară $PQ\le OP+OQ\le 4$ 1p

3. Se consideră mulţimea $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$

a) Determinaţi valoarea lui $\boldsymbol{n}$ ştiind că mulţimea M_n are 21 de submulţimi nevide cu cel mult două elemente.

b) Pentru $n = 6$, determinaţi numărul perechilor (A, B) formate din mulţimi având două elemente în comun şi $A \cup B = M_6$.

Soluţie.

a) Numărul submulțimilor cu 1 un element este egal cu n 1p

Numărul submulțimilor cu 2 elemente este egal cu $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 1p

Din relația $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 21$, se obține $n = 6$ 1p

b) Elementele comune pot fi alese în $C_6^2 = 15$ moduri 2p

Fiecare dintre celelalte 4 elemente ale reuniunii poate fi distribuit în 2 moduri (sau în A, sau în B) 1p

Conform regulii produsului , vor exista $15 \cdot 2^4 = 240$ perechi (A, B) 1p

4. Într-o colonie formată din n = 2016 bacterii intră un virus. În primul minut el omoară două bacterii , apoi se divizează în doi noi viruşi şi concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două bacterii. În minutul următor cei doi viruşi omoară câte două bacterii, apoi cei doi viruşi şi toate bacteriile rămase se divizează din nou în două, şi aşa mai departe. După cât timp întreaga colonie de bacterii va fi omorâtă?(în ore şi minute)

Soluţie.

La momentul $t_0 = 0$ avem un virus şi n = 2016 bacterii 1p

La momentul $t_1 = 1$ avem 2 viruşi şi $2(n-2)$ bacterii 1p

La momentul $t_2 = 2$ avem 2^2 viruşi şi $2^2(n-4)$ bacterii 1p

La momentul $t_3 = 3$ avem 2^3 viruşi şi $2^3(n-6)$ bacterii 1p

La momentul $t_k = k$ avem 2^k viruşi şi $2^k(n-2k)$ bacterii 1p

Deoarece n = 2016 impunem condiţia ca 2016 - 2k = 0, de unde k = 1008 minute 1p

Aşadar întreaga colonie va fi omorâtă în 16 ore şi 48 de minute 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+x+\cos x$

a) Să se studieze monotonia lui *f*.

b) Să se arate că *f* este bijectivă.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{f^{-1}(x)}$.

Soluţie.

a) $f'(x)=2\cdot e^{2x}+1-\sin x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ deci *f* este strict crescătoare 1p

b) *f* strict crescătoare, rezultă *f* funcţie injectivă 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}+x+\cos x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, *f* continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow$ *f* funcţie surjectivă 2p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln(e^{2y}+y+\cos y)}{y}=$ 1p

$\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y+\ln(1+\frac{y}{e^{2y}}+\frac{\cos y}{e^{2y}})}{y}=$ 1p

$\lim\limits_{y\to\infty}[2+\dfrac{1}{y}\ln(1+\dfrac{y}{e^{2y}}+\dfrac{\cos y}{e^{2y}})]=2$ 1p

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x}-3\ln\sqrt{x}$.

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=4$.

b) Să se demonstreze că $x\sqrt{x}\geq 3\ln\sqrt{x}+1,\ \forall x>0$.

c) Demonstraţi că $\dfrac{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+...+n\sqrt{n}}{n}\geq 1+3\ln\sqrt[2n]{n!},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie.

a) Avem $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}\ln x\right)'=\dfrac{3(x^{\frac{3}{2}}-1)}{2x}$ .... 1 p

iar ecuaţia tangentei este : (t): $21x-8y-20-24\ln 2=0$ .... 2 p

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ 1p

x	0		1		∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - -		0	+ + + + + + + + + + + +	
$f\ (x)$		$\searrow$	m (1)	$\nearrow$	

Deoarece $f(x) \geq 1$, $(\forall)x\in \mathbb{R}_+^*$ rezultă că $x\sqrt{x} \geq 3\ln\sqrt{x}+1$, $\forall x>0$ 1p

c) Folosind succesiv inegalitatea de la b) obţinem:

$1\sqrt{1} \geq 3\ln\sqrt{1}+1$

$2\sqrt{2} \geq 3\ln\sqrt{2}+1$

$3\sqrt{3} \geq 3\ln\sqrt{3}+1$

:

$n\sqrt{n} \geq 3\ln\sqrt{n}+1$

Prin adunare: $1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+...+n\sqrt{n} \geq 3\ln\sqrt{n!}+n$

$\dfrac{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+..+n\sqrt{n}}{n} \geq 3\ln\sqrt[2n]{n!}+1$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ 2p

3. a) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A)=504$, să se determine $\det(2\cdot A)$.

b) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)\neq 0$, să se demonstreze că $\det(A^*)=\det(A)$;

A^*- reprezintă matricea adjunctă asociată matricei A.

c) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)\neq 0$ şi $A^*=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine matricea A..

Soluţie.

a) Deoarece $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ va rezulta că $\det(2\cdot A)=2^2\cdot\det(A)=2016$ 2p

b) Deoarece $\det(A)\neq 0$ rezultă că $A^*=\det(A)\cdot A^{-1}$ 1p

Ţinând cont că $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)} \Rightarrow \det(A^*)=\left[\det(A)\right]^2\cdot\dfrac{1}{\det(A)}=\det(A)$ 1p

c) Folosind punctul anterior deducem că $\det(A^*)=\det(A)=2$ 1p

Atunci $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1p

Se obţine că $A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 1p

4. O firmă de deszăpezire are la dispoziţie echipele A, B, C pentru a interveni la o urgenţă. Analizând situaţia s-a constatat ca echipele A şi B ar remedia situaţia în 12 ore, echipele B şi C ar remedia situaţia în 15 ore , iar echipele A şi C remedia situaţia în 20 de ore .

a) În câte ore ar remedia situaţia cele trei echipe lucrând împreună ?

b) Dacă numai o echipă poate fi repartizată acestei lucrări, care este timpul minim în care va fi remediată situaţia?

Soluţie.

a) Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare echipelor A, B, respectiv C pentru a termina lucrarea, lucrând singure 1p

Într-o oră echipa A execută $\frac{1}{x}$ din lucrare, echipa B execută $\frac{1}{y}$ din lucrare , iar echipa C execută $\frac{1}{z}$ din lucrare 1p

Putem obţine $\begin{cases} 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ 15\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \\ 20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1 \end{cases}$ 1p

Din sistemul anterior se obţine $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$, deci cele trei echipe lucrând împreună ar remedia urgenţa în 10 ore 2p

b) Din relaţiile anterioare se obţine că $x=30, y=20, z=60$, deci timpul minim în care va fi remediată urgenţa de către o singură echipă este de 20 de ore , când este trimisă echipa B 2p

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Arătaţi că $2X - 1 / f$ dacă şi numai dacă $a = 10$.

b) Dacă $a = 10$ descompuneţi în factori ireductibili polinomul f .

c) Determinaţi numărul real a astfel încât $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\dfrac{127}{16}$.

Soluție

a) $2X - 1 / f \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + a \cdot \frac{1}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 10$ 1p

b) $f = 2X^3 - 5X^2 + 10X - 4 = (2X-1)(X^2 - 2X + 4) = (2X-1)(X - 1 - i\sqrt{3})(X - 1 + i\sqrt{3})$ 2p

c) Scriem relațiile lui Viete și se înlocuiesc valorile în expresia dată.

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{5}{2}\left(S_1^2 - 2S_2\right) - \frac{a}{2} S_1 + 6 = \frac{173 - 30a}{8}$ 2p

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\frac{173 - 30a}{8}}{2}.$$

Se obține ecuația în necunoscuta a : $\frac{173 - 30a}{16} = -\frac{127}{16} \Leftrightarrow a = 10$ 2p

2. Se consideră inelul matricelor $\left(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot\right)$ şi submulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0} \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3),$$

unde $\left(\mathbb{Z}_3, +, \cdot\right)$ este corpul claselor de resturi modulo 3.

a) Arătaţi că pentru oricare două matrice $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$.

b) Determinaţi elementele mulţimii G .

c) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup. Este grupul $(G, \cdot)$ comutativ? Justificaţi răspunsul.

Soluție

a) $X = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x + \hat{y} & \hat{y} \\ \hat{z} & \hat{x} + \hat{z} \end{pmatrix}$

$X, Y \in G \Rightarrow \det X \neq \hat{0}, \det Y \neq \hat{0}$.

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{x} + \left(\hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z}\right) & \hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z} \\ \hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z} & \hat{a}\hat{x} + \left(\hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z}\right) \end{pmatrix} (1)$$

$\det(XY) = \det X \cdot \det Y \neq \hat{0}$ (2). Din (1) și (2) rezultă mulțimea G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z}_3)$ în raport cu operația de înmulțire indusă 3p

b) $\det A = \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c} = a(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}) \neq \hat{0} \Rightarrow \det A \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{1}$ se obțin : $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{2}$ se obțin: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 1p

c) Notând elementele lui G se întocmește tabla operației și se deduce faptul că este bine structurată (fiecare element apare odată și numai odată pe fiecare linie și coloană).
Din tabla operației se deduce faptul că legea este *necomutativă* 1p

3. Se consideră funcţia continuă $f : [-2,-1] \to [-4,-3]$, astfel încât $\int_{-2}^{-1} f^2(x)dx = \frac{3}{4}$. Să se demonstreze că:

a) $[f(x)+4] \cdot [f(x)+3] \leq 0, (\forall) x \in [-2,-1]$.

b) $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$.

c) $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \in [-52,-51]$.

Soluție:

a) Deoarece $f(x) \geq -4$ şi $f(x) \leq -3, (\forall) x \in [-2,-1]$ va rezulta că

$[f(x)+4] \cdot [f(x)+3] \leq 0, (\forall) x \in [-2,-1]$ 2p

b) Din inegalitatea de mai sus , rezultă $f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$ 1p

Din relaţia $\left(f(x) + \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x), (\forall) x \in [-2,-1]$

Aşadar $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$ 2p

c) Integrând în dubla inegalitate de mai sus obţinem

$-\frac{49}{4} \leq \int_{-2}^{-1} f^2(x)dx + 7 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \leq -12$, de unde se obţine $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \in [-52,-51]$ 2p

4. Trei tractoare A, B şi C ar ara un teren în 7 ore , arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore , se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C , tractorul B este folosit la o altă lucrare , rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, şi C dacă ar ara singure ?

Soluție

Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare tractoarelor A, B, respectiv C pentru a ara terenul, lucrând singure 1p

Într-o oră tractorul A ară $\frac{1}{x}$ din suprafaţa terenului, tractorul B ară $\frac{1}{y}$ din suprafaţa terenului iar tractorul C ară $\frac{1}{z}$ din suprafaţa terenului 2p

Putem obţine $\begin{cases} 7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{6}{x}=1 \end{cases}$ 2p

Rezultă $x=42$ ore, $y=21$ ore şi $z=14$ ore 2p